

► Correction DS n°4

I Arsenic et composés

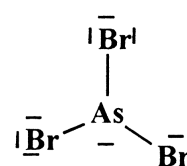
1) (en rouge, les électrons de valence).

${}_7\text{N}$	$1s^2 2s^2 2p^3$
${}_{15}\text{P}$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$
${}_{33}\text{As}$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^3$
${}_{51}\text{Sb}$	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^3$

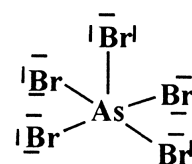
2) Ces quatre éléments appartiennent au **bloc p** et à la **colonne 15** (puisque il manque à chacun des atomes correspondants 3 électrons pour posséder la structure électronique des gaz rares, lesquels correspondent à la colonne 18).

3) L'arsenic se trouvant dans la même colonne que l'azote, il possède 5 électrons de valence.

- Dans AsBr_3 , l'arsenic engage 3 électrons (1 par liaison) avec les 3 atomes de brome. Il reste donc un doublet non liant sur l'arsenic.



- Dans AsBr_5 , l'arsenic ne vérifie pas la règle de l'octet mais cela n'est pas gênant car il possède des niveaux d qui permettent cela. Ses 5 électrons de valence servent alors à former les 5 liaisons avec les atomes de brome.



- Le **phosphore** possédant lui aussi des niveaux d , il pourra donner lieu à la formation des mêmes bromures.

- En revanche, l'**azote** ne possède pas de niveaux d et on ne pourra donc obtenir que le bromure qui vérifie la règle de l'octet pour l'azote, c'est-à-dire le tribromure d'azote.

4) Le brome appartient à la famille des **halogènes**. Par ordre d'électronégativité croissante : **iode** (I), **brome** (Br), **chlore** (Cl) et **fluor** (F).

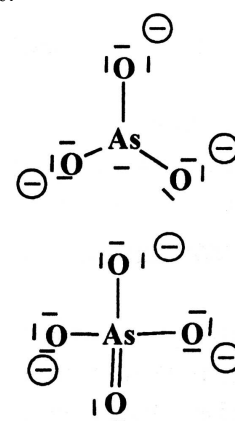
5) Pour l'ion arsénite AsO_3^{3-} :

Comme chacun des atomes d'oxygène n'est lié qu'à l'arsenic, l'arsenic engage 3 électrons dans les liaisons avec les oxygènes. Il possède donc également un doublet non liant. L'atome d'oxygène possède 6 électrons de valence. Or, pour vérifier la règle de l'octet dans cet édifice, les 3 atomes d'oxygènes portent chacun 3 doublets non liants, ce qui fait qu'ils ont 7 électrons en propre au lieu de 6. Les atomes d'oxygène sont donc chargés tous les 3 négativement.

Pour l'ion arséniate AsO_4^{3-} :

Le même type de structure (1 liaison + 3 doublets non liants) pour les atomes d'oxygène conduirait à 4 charges négatives pour l'ensemble des atomes d'oxygène et une charge positive (4 électrons au lieu de 5) pour l'atome d'arsenic.

On préfère écrire une formule avec le moins de charges partielles possible, en introduisant une double liaison $\text{As}=\text{O}$ à la place d'une des liaisons simples $\text{As}-\text{O}$.



II Oscillateur mécanique

1) L'application du PFD donne, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, pour la masse m :

$$m\ddot{z} = mg - k(z - l_0) - \lambda\dot{z} \quad \textcircled{1}$$

$$0 = mg - k(z_{\text{éq}} - l_0) \quad \textcircled{2} \rightarrow$$

$$z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

2) En faisant ① – ② et en introduisant $x(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$:

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (*)$$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

3) Le portrait de phase est caractéristique d'un régime libre **pseudo-périodique**.

4) L'équation caractéristique associée à (*) est : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

- de discriminant : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \cdot (1 - 4Q^2) < 0$

- de racines complexes : $r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} = -\frac{1}{\tau} \pm \omega$

La solution $x(t)$ est pseudo-périodique : $x(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, de pseudo-

pulsation ω et donc de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \cdot \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

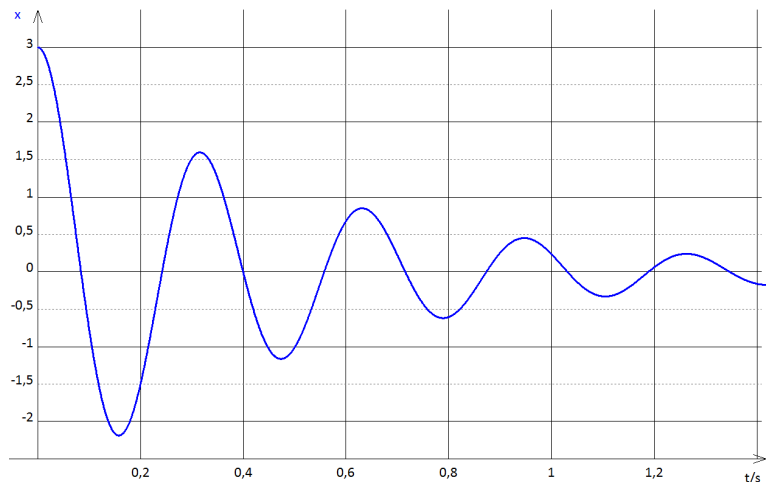
5) La décroissance logarithmique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta &= \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}{(A \cos(\omega(t+T)) + B \sin(\omega(t+T))) \cdot \exp\left(-\frac{t+T}{\tau}\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}\right) = \ln\left(\exp\left(\frac{T}{\tau}\right)\right) = \frac{T}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \cdot T_0 \cdot \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \end{aligned}$$

Donc : $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

6) $x_0 = 3 \text{ cm} \mid x_f = 0 \mid T = 315 \text{ ms} \mid \delta = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) \simeq 0,628$ car $x_1 = x(T) \simeq 1,6 \text{ cm}$

7)



8) $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} \simeq 5$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \simeq 20 \text{ rad.s}^{-1}$$

Puisque $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow k = m\omega_0^2 \simeq 200 \text{ kg.s}^{-2} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m} \rightarrow \lambda = \frac{m\omega_0}{Q} \simeq 2 \text{ kg.s}^{-1} \end{cases}$

III Caractéristiques d'une bobine

1)

Grandeur	T (s)	ω (rad/s)	I_m (A)	U_m (V)	Z_{AB} (Ω)
Valeur numérique	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$\frac{2\pi}{T} = 1570$	$\frac{u_{I,m}}{R} = 0,20$	$u_{II,m} = 8,0$	$\frac{U_m}{I_m} = 40$

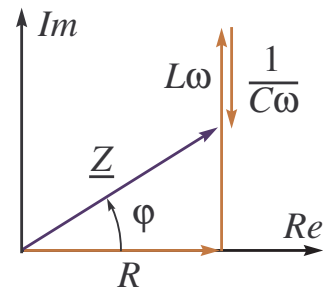
2) u_{II} est en avance de phase par rapport à u_I car elle passe par son maximum toujours avant u_I .

3) $\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t = \omega \cdot \Delta t = 1570 \cdot (0,5 \text{ div} \times 1 \text{ ms/div}) = 0,785 \text{ rad} \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ}$

4) Si la bobine est parfaite, il s'agit d'une inductance L pure et alors

$$\underline{Z} = \begin{cases} Z \cdot e^{j\varphi} \\ R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \end{cases} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi$$

Soit : $\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$



On devrait donc avoir, par identification : $R = Z \cos \varphi = 28,3 \Omega$, ce qui n'est pas le cas puisque $R = 20 \Omega$. Donc la bobine n'est pas idéale.

5) D'après ce qui précède $\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r} = 1$,

soit $r + R = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ et $Z_{AB} = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = (R+r)\sqrt{2}$

Soit : $\boxed{r = \frac{Z_{AB}}{\sqrt{2}} - R = 8,3 \Omega}$

6) $\boxed{L = \frac{1}{\omega} \left(R + r + \frac{1}{C\omega} \right) = 59 \text{ mH}}$

IV Dédoublage de fréquence et filtrage

1)

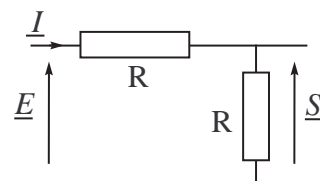
$$\begin{aligned} m(t) = a(t) \cdot e_0(t) &= 2AE_0 \cos(2\pi f_a t) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ &= 2AE_0 \frac{1}{2} [\cos(2\pi f_a t - 2\pi f_0 t - \varphi_0) + \cos(2\pi f_a t + 2\pi f_0 t + \varphi_0)] \\ &= AE_0 [\cos(2\pi(f_0 - f_a)t + \varphi_0) + \cos(2\pi(f_0 + f_a)t + \varphi_0)] \end{aligned}$$

$\boxed{m(t) = M \cdot [\cos(2\pi f t + \varphi_0) + \cos(2\pi f' t + \varphi_0)]}$ avec $\begin{cases} M = AE_0 \\ f = f_0 - f_a = 30 \text{ Hz} \\ f' = f_0 + f_a = 2870 \text{ Hz} \end{cases}$

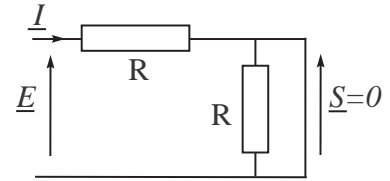
2) • Aux BF, une capacité se comporte comme un interrupteur ouvert et les deux résistances sont en série, soit :

$\underline{S} = \frac{\underline{E}}{2}$ et $\underline{H} = \frac{1}{2}$.

$G_{dB}(\omega \rightarrow 0) \rightarrow -6 \text{ dB}$



- Aux HF, une capacité se comporte comme un fil, donc :
 $\underline{S} \rightarrow 0$ et $\underline{H} \rightarrow 0$.
 $G_{dB}(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow -\infty \text{ dB}$



- **CI** : Ils 'agit d'un **filtre Passe Bas**.

Rq : On en déduit que $H_{max} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow G_{dB}(max) = -6 \text{ dB}$.

$$3) \underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \frac{1}{1 + \frac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{R}{R + R + jR^2C\omega}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \frac{1}{2 + jx'} = \frac{H_0}{1 + jx'} \quad \text{avec} \quad x' = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \equiv \frac{RC\omega}{2} = \frac{x}{2} \quad \text{et} : \quad H_0 = \frac{1}{2}$$

4) La définition de la pulsation de coupure est :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}(max) - 3 \text{ dB}$$

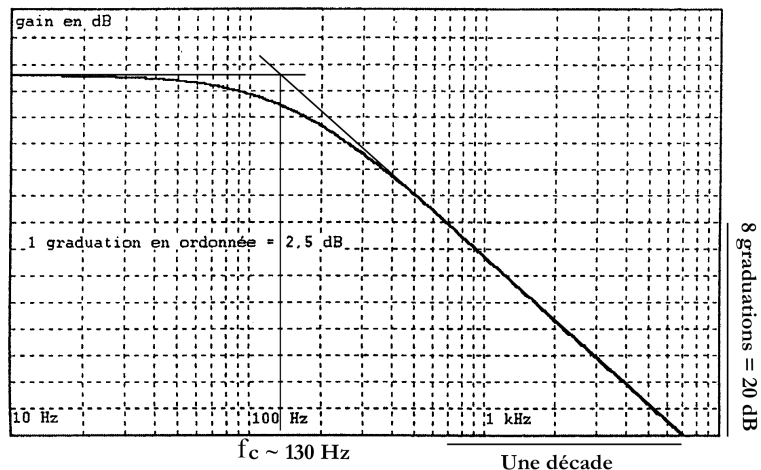
Et puisque $H = |\underline{H}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x'^2}}$ et que $H_{max} = \frac{1}{2}$ on en déduit :

$$\frac{H_{max}}{\sqrt{1 + x_c'^2}} = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + x_c'^2 = 2 \Leftrightarrow x_c' = \frac{RC \cdot \omega_c}{2} = 1$$

On en déduit :

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{2}{RC}$$

5) Le filtre étant un Passe Bas du premier ordre, ω_c est l'intersection des deux asymptotes à la courbe de gain, l'ABF étant horizontale d'équation $G_{dB}(ABF) = 20 \log(H_{max}) = -6 \text{ dB}$ et l'AHF étant une droite d'équation $G_{dB}(AHF) = -20 \log \frac{\omega}{\omega_c} - 6 \text{ dB}$.



- Graphiquement : $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{\pi RC} \simeq 130 \text{ Hz} \sim 150 \text{ Hz}$ – soit : $RC \sim \frac{1}{\pi f_c} = 2.10^{-3} \text{ s}$.

6) • Si le filtre se comporte comme un intégrateur, alors $s(t) = \pm \omega_0 \int e(t) dt$, soit $\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \pm \frac{\omega_0}{j\omega}$.

Or, $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx'} \simeq \frac{1}{jx'}$ pour les Hautes Fréquences ($x \gg 1$).

⇨ Donc **le filtre se comporte comme un intégrateur en Hautes Fréquences**.

• On vérifie cette propriété sur le diagramme de BODE en constatant que la pente de l'AHF est de -20 dB/dec , **pente caractéristique de l'Intégrateur Idéal**.

(Puisque si, à une constante multiplicative près, $\underline{H} = \frac{1}{jx'}$, alors $G_{dB} = 20 \log H = -20 \log x'$).

• L'argument de la fonction de transfert est le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée :

$$\arg(\underline{H}) = \phi = \varphi_s - \varphi_e = -\arg(1 + jx') = -\arctan(x') \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{pour} \quad x' \gg 1$$

→ Aux HF, $s(t)$ est en quadrature retard de phase par rapport à $e(t)$.

7) $e(t) = m(t) = M.[\cos(2\pi ft + \varphi_0) + \cos(2\pi f't + \varphi_0)] = e_1(t) + e_2(t).$

La sortie est alors : $s(t) = S.\cos(2\pi ft + \varphi_s) + S'.\cos(2\pi f't + \varphi'_s) = s_1(t) + s_2(t),$ avec :

$$\underline{H}(j2\pi f) = \frac{S_1}{E_1} = \frac{S}{M} \exp(j(\varphi_{s1} - \varphi_0)) \rightarrow G_{dB}(f) = 20 \log \frac{S}{M}$$

$$\underline{H}(j2\pi f') = \frac{S_2}{E_2} = \frac{S'}{M} \exp(j(\varphi_{s2} - \varphi_0)) \rightarrow G_{dB}(f') = 20 \log \frac{S'}{M}$$

Comme

$f = 30Hz$ graphiquement, on lit : $G_{dB}(f) \simeq -6 dB$

$f' = 2870Hz \simeq 2900 Hz$ $G_{dB}(f') \simeq -32,5 dB$

Donc : $G_{dB}(f') - G_{dB}(f) = 20 \log \frac{S'}{S} = -26,5 dB,$ soit : $\frac{S'}{S} = 10^{-\frac{26,5}{20}} = 10^{-1,385}.$

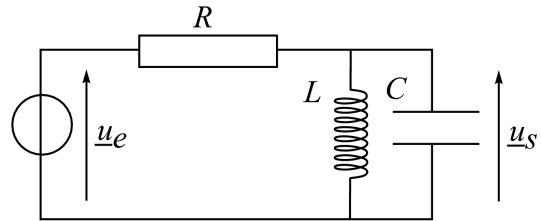
→ $\frac{S'}{S} = 4,7 \cdot 10^{-2}$

→ Ainsi, en sortie, l'amplitude de la fréquence f' est $\frac{1}{4,7 \cdot 10^{-2}} \simeq 21$ fois plus faible que celle de f alors qu'en entrée les fréquences étaient d'amplitude M identiques.

V Filtre d'ordre 2

1) Filtre passe-bande.

2) On a : $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}},$
avec : $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega},$ ce qui conduit à :



$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + RLC(j\omega)^2} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega + LC(j\omega)^2} = \frac{1}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

3) $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = \frac{\underline{H}_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ avec $x \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{array} \right.$

Il s'agit bien entendu d'un **filtre passe-bande du second ordre.**

A.N. : $f_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 919 Hz$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 5,8$

4) Comme \underline{H} s'écrit : $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)},$ on a : $H = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

Par définition, avec $f_c = x_c \cdot f_0$: $G_{dB}(x_c) = \begin{cases} G_{dB}(\max) - 3 dB = 0 - 10 \log 2 \\ -10 \log \left[1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 \right] \end{cases}$

On en déduit : $Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow Q \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow x_c^2 \mp \frac{1}{Q}x_c - 1 = 0$

Deux polynômes de discriminant $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$

Comme $\Delta > 0$, il y a 4 racines réelles, dont deux seulement positives. On trouve :

$$\begin{aligned} f_{c_1,th} = x_1 \cdot f_0 &= \frac{-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \cdot f_0 = \frac{f_0}{2Q} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \simeq 843 \text{ Hz} \\ f_{c_2,th} = x_2 \cdot f_0 &= \frac{\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \cdot f_0 = \frac{f_0}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \simeq 1002 \text{ Hz} \end{aligned}$$

5) $\Delta f = f_{c_2} - f_{c_1} = \frac{f_0}{Q} \simeq 159 \text{ Hz}$

VI Satellites

1/2/3)

Principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite, soumis à la force gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_T \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$, en mouvement circulaire à la vitesse $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta$ dans le référentiel géocentrique considéré galiléen :

$$m \overrightarrow{a_{M/R_0}} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{matrix} m \\ (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) \end{matrix} \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & & \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & & \\ \ddot{z} & & \end{vmatrix} = \begin{matrix} F \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} m \\ (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z) \end{matrix} \begin{vmatrix} -\frac{v^2}{r} & & \\ \frac{dv}{dt} & & \\ 0 & & \end{vmatrix} = \begin{matrix} -\frac{\mathcal{G}M_T \cdot m}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

La projection du PFD selon \vec{e}_r donne : $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T + h}}$

4) $v_H = 7520 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad T_H = \frac{2\pi \cdot r}{v} = 5911 \text{ s} \simeq 1 \text{ h } 38 \text{ min}$