E4_ Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

cf Polycop, p.1.

I Régime Sinusoïdal Forcé

1) Régime transitoire et régime permanent

voir poly

2) Notations complexes

$x = x_p + \cancel{x_h}(t)$ au bout de qques τ

$x = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$

Définition: représentation complexe associée à $x(t)$:

$$\boxed{\underline{x} = X_m \exp[j(\omega t + \varphi_x)]}$$

Rappels: $e^{a+b} = e^a . e^b$

$(e^a)^c = e^{a.c}$

$$\boxed{\underline{x} = X_m e^{j\varphi_x} . e^{j\omega t}}$$

amplitude complexe : $\boxed{\underline{X} = X_m e^{j\varphi_x}}$

contient toute l'information sur la réponse à l'excitation, à savoir:

→ l'amplitude (réelle) $X_m \geq 0$

→ la phase à l'origine des temps $\varphi_x \in]-\pi, \pi]$

$\in [0; 2\pi[$

$$\boxed{X_m = |\underline{X}|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_x = \arg(\underline{X})}$$

- si $x = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$ — si $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$

alors $x = \mathcal{R}e(\underline{x})$ — $x = \mathcal{I}m(\underline{x})$

- notation cartésienne — notation polaire

$\underline{x} = a + jb$ — $\underline{x} = |\underline{x}|\, e^{j\arg(\underline{x})}$

$|\underline{x}| = \sqrt{a^2+b^2} = |X_m| \times |e^{j\varphi_x}| \times |e^{j\omega t}|$
$= X_m$

$\arg(\underline{x}) = \omega t + \varphi_x$

On préfère travailler en amplitude complexe :

$$\boxed{\underline{X} = a + jb = X_m e^{j\varphi_x}}$$

$a = \mathcal{R}e(\underline{X})$
$b = \mathcal{I}m(\underline{X})$

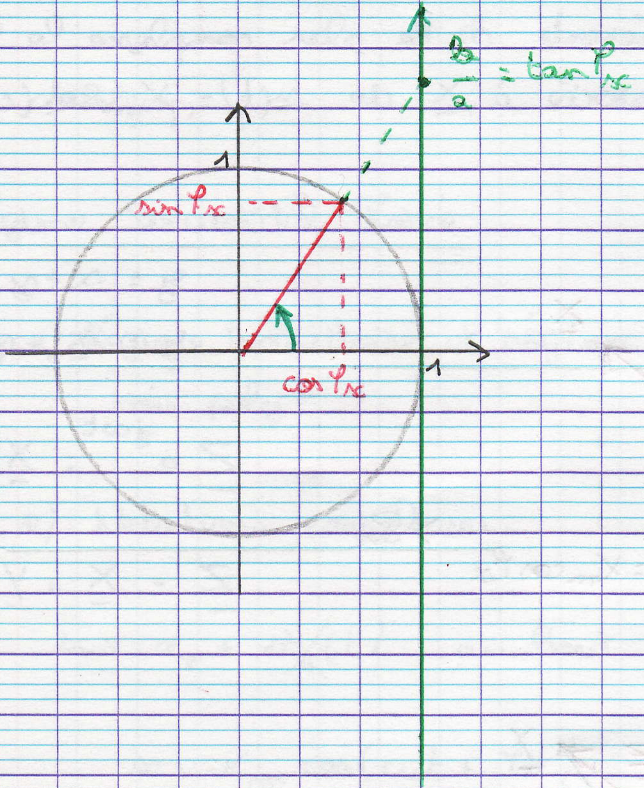
$\underline{X} = X_m(\cos\varphi_x + j\sin\varphi_x)$

$\rightarrow$ $a = X_m \cos\varphi_x$ $\rightarrow$
$b = X_m \sin\varphi_x$

$\cos\varphi_x = \dfrac{\mathcal{R}e(\underline{X})}{X_m}$	du signe de a
$\sin\varphi_x = \dfrac{\mathcal{I}m(\underline{X})}{X_m}$	du signe de b
$\tan\varphi_x = \dfrac{\mathcal{I}m(\underline{X})}{\mathcal{R}e(\underline{X})}$	du signe de $\frac{b}{a}$

__cas où $a > 0$__

$\hookrightarrow \cos \varphi_x > 0$

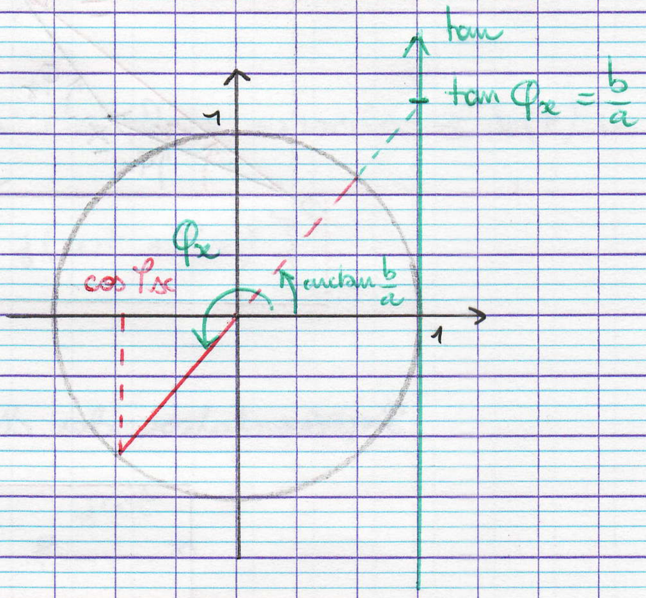


$$\boxed{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_x \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{donc} \quad \varphi_x = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{array}}$$

__cas où $a < 0$__

$\hookrightarrow \cos \varphi_x < 0$

$a < 0$

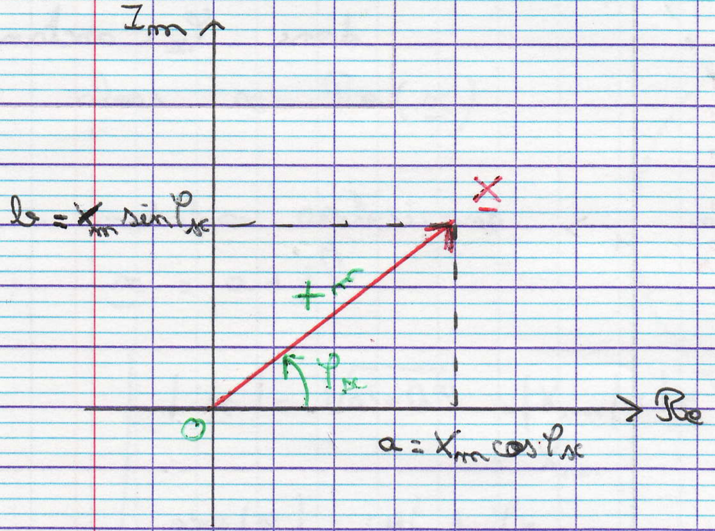


$$\boxed{\varphi_x = \arctan \frac{Im(\underline{X})}{Re(\underline{X})} \pm \pi}$$

$$\boxed{\forall \varphi_x \qquad X_m = \sqrt{Re(\underline{X})^2 + Im(\underline{X})^2}}$$

b- Représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale

Déf: On représente ds le plan complexe le vecteur de Fresnel associé à $\underline{X}$ de $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$

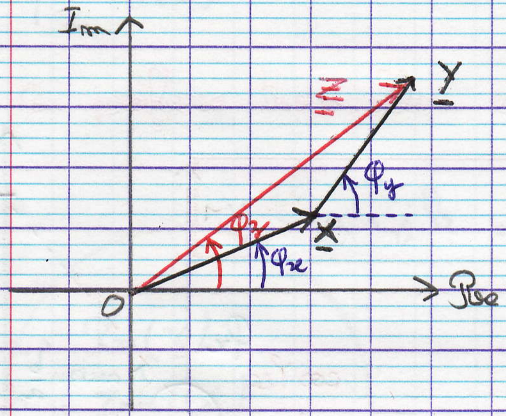


$z = x + y$

$\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$

$\underline{Z}\, e^{j\omega t} = \underline{X}\, e^{j\omega t} + \underline{Y} e^{j\omega t}$

$\underline{Z} = \underline{X} + \underline{Y}$



Représentation des dérivées temporelles:

$x \longrightarrow \underline{x} = \underline{X}\, e^{j\omega t}$

$\dot{x} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = j\omega \underline{x} = \dot{\underline{X}}\, e^{j\omega t} \\ \dot{\underline{X}} = j\omega \underline{X} = X_m\, e^{j\varphi} \cdot j\omega \end{array}}$

or $\begin{cases} j = e^{j\frac{\pi}{2}} \\ -j = \frac{1}{j} = e^{-j\pi/2} \end{cases}$ $\quad \dot{\underline{X}} = \omega X_m\, e^{j(\varphi_x + \frac{\pi}{2})}$